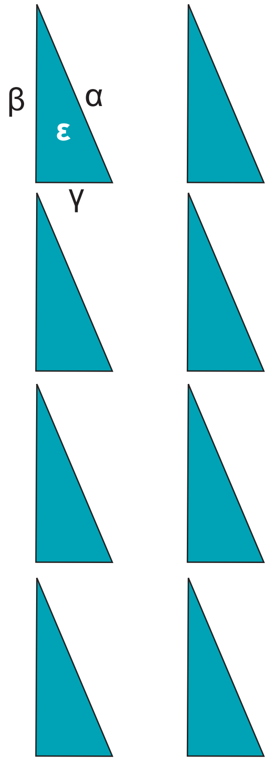
1.4. Πυθαγόρειο θεώρημα



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται οκτώ ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές β, γ και υποτείνουσα α και τρία τετράγωνα με πλευρές α, β, γ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ε, Ε, $Ε_1$, $Ε_2$ των διπλανών τριγώνων και τετραγώνων.

β) Να τοποθετήσετε κατάλληλα τα τρίγωνα και τετράγωνα, ώστε να σχηματίσουν δύο νέα τετράγωνα, πλευράς (β + γ).

Λύση

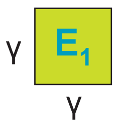
α) Έχουμε ότι: $ε = \frac{β \cdot γ}{2}$

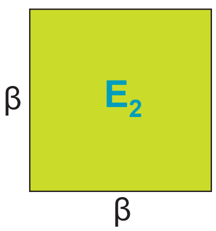
$Ε = α^2$
$Ε_1 = γ^2$
$Ε_2 = β^2$

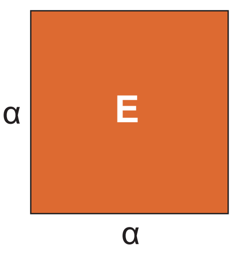
β) Αρκεί να τα τοποθετήσουμε όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε το εμβαδόν των ίσων τετραγώνων πλευράς (β + γ) με δύο διαφορετικούς τρόπους:

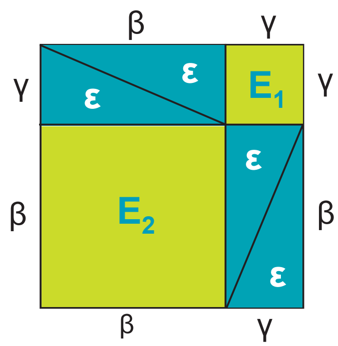
1ος τρόπος: $Ε_1 + Ε_2 + 4ε$ από το πρώτο τετράγωνο που αποτελείται από 4 τρίγωνα και τα δύο τετράγωνα πλευράς β, γ αντίστοιχα.

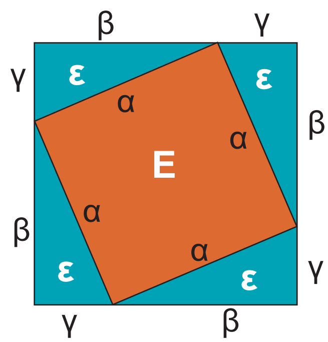
2ος τρόπος: $Ε + 4ε$ από το δεύτερο τετράγωνο που αποτελείται πάλι από 4 τρίγωνα και το τετράγωνο πλευράς α.









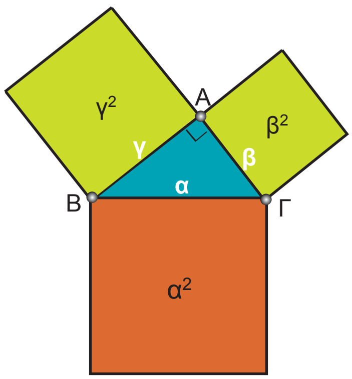


Επομένως, θα ισχύει ότι: $Ε_1 + Ε_2 + 4ε = Ε + 4ε$ ή

$Ε_1 + Ε_2 = Ε$ ή

$$\boxed{β^2 + γ^2 = α^2}$$

Η σχέση αυτή, που συνδέει τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα ενός τριγώνου, εκφράζει το **Πυθαγόρειο θεώρημα**, δηλαδή ισχύει:



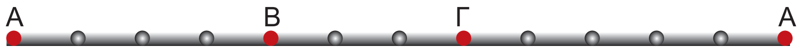
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

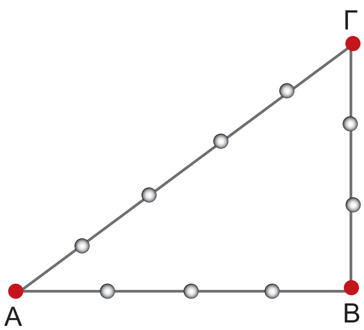
Παρατήρηση:

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι:
$α^2 = β^2 + γ^2$, δηλαδή το εμβαδόν του μεγάλου πορτοκαλί τετραγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο πράσινων τετραγώνων.

Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος



Στην Αρχαία Αίγυπτο για την κατασκευή ορθών γωνιών χρησιμοποιούσαν το σκοινί του παραπάνω σχήματος. Όπως βλέπουμε, το σκοινί έχει 13 κόμπους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους που σχηματίζουν 12 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

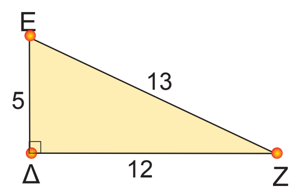


Κρατώντας τους ακραίους κόμπους ενωμένους και τεντώνοντας το σκοινί στους κόκκινους κόμπους, σχηματίζεται το τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο οι αρχαίοι Αιγύπτιοι πίστευαν ότι είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την κορυφή Β. Μεταγενέστερα, οι αρχαίοι Έλληνες επαλήθευσαν τον ισχυρισμό αυτό αποδεικνύοντας την επόμενη γενική πρόταση, που είναι γνωστή ως το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος:

Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

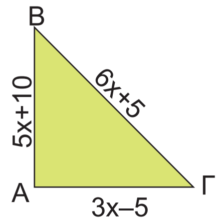
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να επαληθεύσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος.



Λύση: Στο τρίγωνο ΔΕΖ οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη 5 και 12, οπότε το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών είναι $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.
Επιπλέον, η υποτείνουσα έχει μήκος 13 και το τετράγωνό της ισούται με: $13^2 = 169$.
Επομένως, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, αφού: $5^2 + 12^2 = 13^2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2



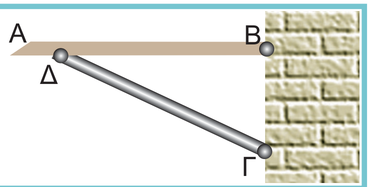
Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 150 m.
α) Να βρείτε τον αριθμό x.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Λύση: α) Η περίμετρος του τριγώνου είναι:
ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = 5x + 10 + 6x + 5 + 3x – 5 = 14x + 10.
Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι:
14x + 10 = 150 ή 14x = 150 – 10 ή
14x = 140 ή $x = \frac{140}{14}$.
Άρα x = 10.

β) Για x = 10 τα μήκη των πλευρών (σε μέτρα) είναι:
ΑΒ = 5 · 10 + 10 = 60,
ΑΓ = 3 · 10 – 5 = 25,
ΒΓ = 6 · 10 + 5 = 65.
Επομένως: $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 60^2 + 25^2 = 3600 + 625 = 4225$.
Επίσης: $ΒΓ^2 = 65^2 = 4225$.
Επομένως: $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ και σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

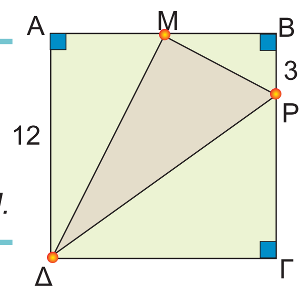
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ένα ράφι ΑΒ είναι στερεωμένο σε ένα κατακόρυφο τοίχο με ένα μεταλλικό στήριγμα μήκους ΓΔ = 32,6 cm. Αν ΒΔ = 27,7 cm και ΒΓ = 17,2 cm, να εξετάσετε αν το ράφι είναι οριζόντιο.



Λύση: Το ράφι θα είναι οριζόντιο, μόνο αν είναι κάθετο στον τοίχο, δηλαδή αν το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο στο Β.
Είναι: $ΒΔ^2 + ΒΓ^2 = 27{,}7^2 + 17{,}2^2 = 767{,}29 + 295{,}84 = 1063{,}13$.
Επίσης: $ΓΔ^2 = 32{,}6^2 = 1062{,}76$.
Επομένως: $ΒΔ^2 + ΒΓ^2 \neq ΓΔ^2$, οπότε το τρίγωνο ΒΓΔ δεν είναι ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4



Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 12 cm. Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και ΒΡ = 3 cm.
α) Να υπολογίσετε τα $ΜΔ^2$, $ΜΡ^2$ και $ΔΡ^2$.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΡΔ είναι ορθογώνιο στο Μ.

Λύση: α) Αφού το Μ είναι μέσο του ΑΒ, είναι ΑΜ = ΜΒ = 6 (cm).
Επίσης: ΓΡ = 12 – 3 = 9 (cm).
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΔ έχουμε:
$ΜΔ^2 = ΑΔ^2 + ΑΜ^2 = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180$.

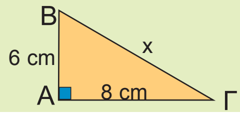
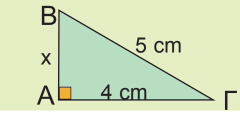
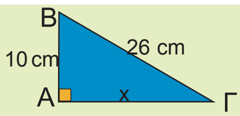
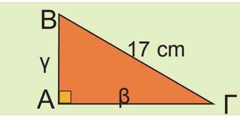
Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΡ έχουμε:
$ΜΡ^2 = ΜΒ^2 + ΒΡ^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$,
και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΡ έχουμε:
$ΔΡ^2 = ΔΓ^2 + ΡΓ^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$.

β) Είναι $ΜΔ^2 + ΜΡ^2 = 180 + 45 = 225 = ΔΡ^2$, οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος, το τρίγωνο ΜΡΔ είναι ορθογώνιο στο Μ.

Λύση

ΕΡΩΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

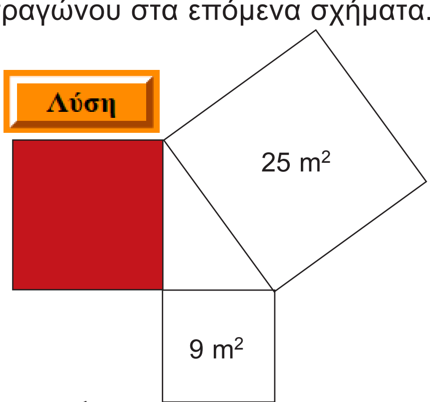
Στις παρακάτω ερωτήσεις 1 - 4 τα τρίγωνα ΑΒΓ είναι ορθογώνια στο Α.
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

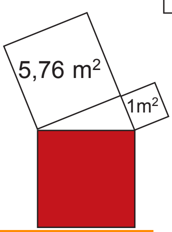
			Α	Β	Γ	Δ
1		x =	7 cm	9 cm	10 cm	12 cm
2		x =	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
3		x =	14 cm	20 cm	24 cm	30 cm
4		β = και γ =	β=15 και γ=8	β=13 και γ=10	β=12 και γ=13	β=8 και γ=9

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

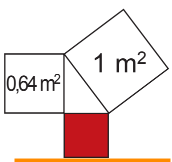
1 Να βρείτε το εμβαδόν του κόκκινου τετραγώνου στα επόμενα σχήματα.

Λύση





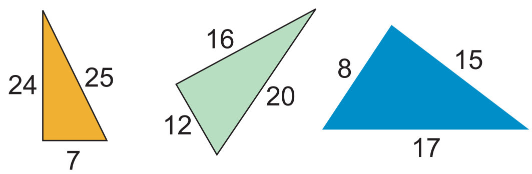
Λύση



Λύση

2 Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια.

Λύση



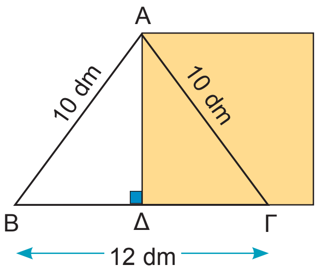
3 α) Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών 6 cm, 8 cm και 10 cm. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει διπλάσιες πλευρές από τις πλευρές του ΑΒΓ, καθώς και το τρίγωνο που έχει τις μισές πλευρές από τις πλευρές του ΑΒΓ, είναι επίσης ορθογώνιο.

Λύση

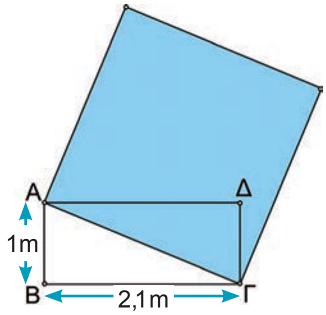
Λύση

4 Το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ = 10 dm και ΒΓ = 12 dm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με το ύψος ΑΔ του τριγώνου.



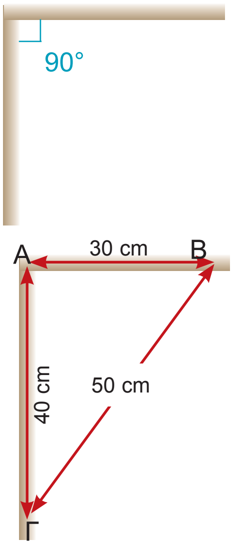
Λύση

5 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μπλε τετραγώνου το οποίο έχει πλευρά ίση με τη διαγώνιο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.



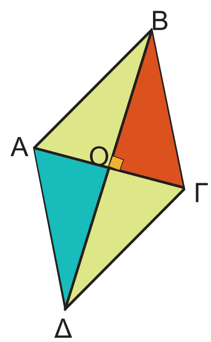
Λύση

6 Για να σχηματίσει ορθή γωνία με δύο ξύλινα δοκάρια (όπως λέμε για να «γωνιάσει» τα δοκάρια), ένας τεχνίτης μετράει στο ένα δοκάρι ΑΒ = 30 cm και στο άλλο ΑΓ = 40 cm. Στη συνέχεια, τα τοποθετεί κατάλληλα, ώστε να είναι ΒΓ = 50 cm. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί είναι σίγουρος ότι η γωνία που σχηματίζουν τα δοκάρια είναι ορθή;



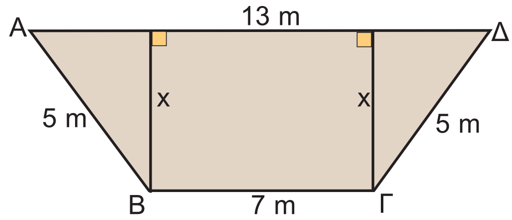
Λύση

7 Ο χαρταετός του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με διαγώνιες 12 dm και 16 dm. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν της επιφάνειας του χαρταετού.



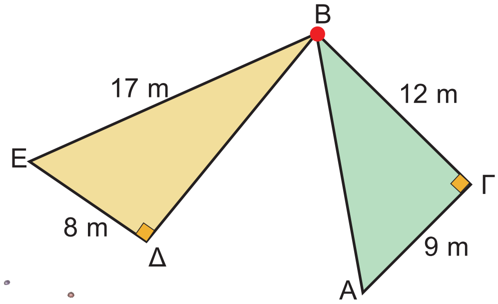
8 Η διατομή ενός καναλιού είναι σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου με πλευρές: ΓΔ = ΑΒ = 5 m, ΒΓ = 7 m και ΑΔ = 13 m. Να υπολογίσετε το ύψος x του καναλιού.

Λύση



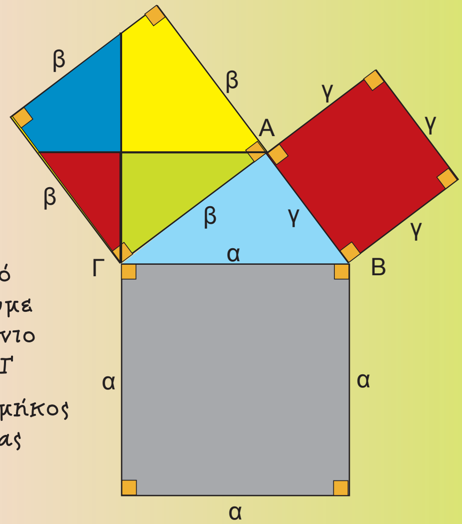
9 Ποια από τις τοποθεσίες Ε, Δ, Α είναι πλησιέστερα στην πόλη Β;

Λύση



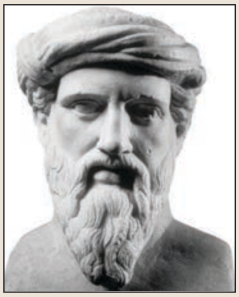
ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

Λύση



Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) με μήκος υποτείνουσας α και μήκη καθέτων πλευρών β και γ. Εξωτερικά του τριγώνου έχουμε κατασκευάσει τρία τετράγωνα με μήκη πλευρών α, β και γ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τα χρωματιστά «κομμάτια» που αποτελούν τα τετράγωνα των καθέτων πλευρών, μπορείτε να «γεμίσετε» το μεγάλο γκρίζο τετράγωνο της υποτείνουσας εφαρμόζοντας ακριβώς τα χρωματιστά κομμάτια χωρίς το ένα να επικαλύπτει το άλλο;

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί ένα από τα πιο κομψά αλλά ταυτόχρονα και πιο σημαντικά θεωρήματα με πολλές εφαρμογές.
Η ανακάλυψη του θεωρήματος, αν και παραδοσιακά αποδίδεται στον ***Πυθαγόρα το Σάμιο*** *(585 - 500 π.Χ.), δεν είναι βέβαιο ότι έγινε από αυτόν ή από κάποιον από τους μαθητές του στην Πυθαγόρεια Σχολή που ίδρυσε.*
Όμως είναι βέβαιο πως είτε ο ίδιος είτε οι μαθητές του διατύπωσαν την πρώτη απόδειξη. Σύμφωνα με την παράδοση, οι θεοί ανακοίνωσαν στον Πυθαγόρα το ομώνυμο θεώρημα και όταν το απέδειξε, για να τους ευχαριστήσει, έκανε θυσία 100 βοδιών. Για τον λόγο αυτό, το Πυθαγόρειο θεώρημα αναφέρεται συχνά και ως "θεώρημα της εκατόμβης".
Επιπλέον, οι Πυθαγόρειοι διατύπωσαν και απέδειξαν το αντίστροφο του θεωρήματος.
Πολλοί μαθηματικοί, διάσημοι και μη, προσπάθησαν να αποδείξουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με δική τους ανεξάρτητη μέθοδο. Ανάμεσα σ' αυτούς υπάρχουν και προσωπικότητες, όπως ο Leonardo da Vinci και ο πρόεδρος των ΗΠΑ Garfield.
Το 1940 ο Elisha Scott Loomis περιέλαβε 365 διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος σ' ένα βιβλίο.

Επανάληψη Κεφαλαίου 1

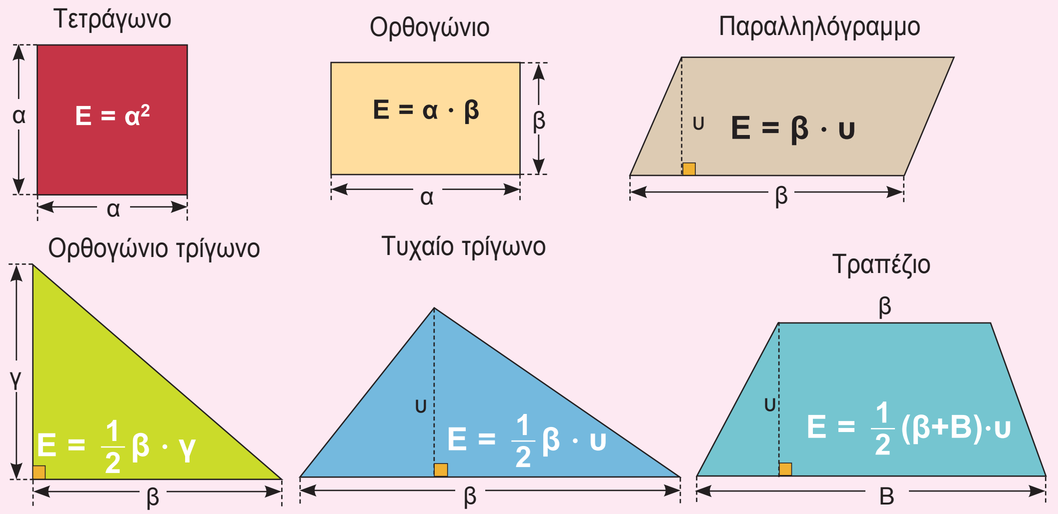
Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων - Πυθαγόρειο θεώρημα

- Το **εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας** είναι ο θετικός αριθμός που εκφράζει το πλήθος των μονάδων μέτρησης, το οποίο χρειάζεται να πάρουμε, ώστε να καλύψουμε τη δοσμένη επιφάνεια.

- **Μονάδες μέτρησης εμβαδών**

1 m^2=	100 dm^2 =	10.000 cm^2 =	1.000.000 mm^2
	1 dm^2 =	100 cm^2 =	10.000 mm^2
		1 cm^2 =	100 mm^2

- **Εμβαδά των βασικών επιπέδων σχημάτων.**



- **Πυθαγόρειο θεώρημα: $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$**
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.
- **Αντίστροφο Πυθαγόρειου θεωρήματος**
Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.